HOOFDSTUK 4: De normale verdeling

4.1 Eigenschappen van de normale verdeling

Opgave 1:

a. $155 - < 160\ ; 160 - < 165\ ; ...\ ; 185 - < 190$

b. $15 + 80 + 235 + 370 + 210 + 80 + 10 = 1000$

c.

L_1	L_2
157,5	15
162,5	80
167,5	235
172,5	370
177,5	210
182,5	80
187,5	10

1-VARSTAT L_1, L_2 geeft: $\bar{x} = 172{,}3$ cm en $\sigma_x = 5{,}7$ cm

d. $\frac{680}{1000} \cdot 100\% = 68\%$

e. $\frac{950}{1000} \cdot 100\% = 95\%$

Opgave 2:

a. 1 cm

b. 370

c. nee, de tweede groep bevat veel meer personen.
Bijvoorbeeld: bij groep 1 is de frequentie van de klasse $170 - < 175$ gelijk aan 370
Bij groep 2 is de frequentie van deze klasse: $340 + 360 + 370 + 350 + 340 = 1760$

Opgave 3:

a. niet

b. wel

c. niet

d. wel

e. niet

f. wel

g. wel

h. niet

Opgave 4:

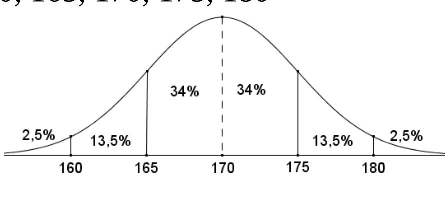
a. bij de lijnen staan achtereenvolgens de getallen: 160, 165, 170, 175, 180

b. 81,5%

c. 2,5%

d. 16%

e. 47,5%



Opgave 5:

a. 81,5% dus $0{,}815 \cdot 5000 = 4075$

b. 84% dus $0{,}84 \cdot 5000 = 4200$

c. $\frac{125}{5000} \cdot 100\% = 2{,}5\%$ dus dat zijn de zwaarste 2,5%, dus meer dan 202 gram

Opgave 6:
Bij iedere spijker heeft een knikker 2 mogelijkheden: naar links of naar rechts, en de kans op naar links is even groot als de kans op naar rechts. Om in het meest linkse vakje terecht te komen, moet de knikker 5 keer naar links, dat kan op 1 manier. Om in het derde bakje terecht te komen, moet de knikker 3 keer naar links en 2 keer naar rechts, dat kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren.

Opgave 7:
a. bij de 18-jarigen hoort kromme A
bij de 60-jarigen hoort kromme C
Jongere mannen hebben een kortere reactietijd dan oudere mannen, bovendien neemt de spreiding van de reactietijd toe bij oudere mannen.
b. groep C

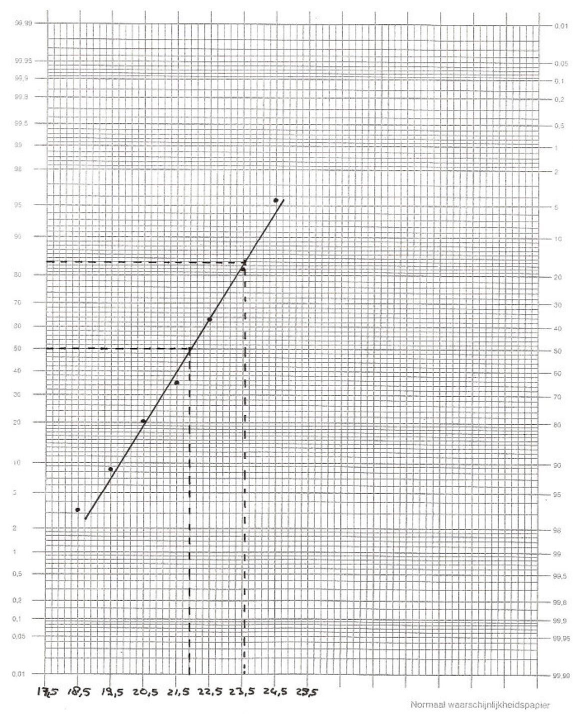
Opgave 8:
A: $\mu = 65 \quad \sigma = 1$
B: $\mu = 66{,}5 \quad \sigma = 0{,}8$
C: $\mu = 67{,}5 \quad \sigma = 1{,}5$
D: $\mu = 70 \quad \sigma = 0{,}4$

Opgave 9:
a. $\mu = 7{,}9$
b. bij 84% hoort $\mu + \sigma = 8{,}9$
c. $\sigma = 8{,}9 - 7{,}9 = 1{,}0$

Opgave 10:
De schaalverdeling op het papier loopt tot 99,99%

Opgave 11:
a.

breedte in mm	freq	cum freq	rel cum freq
$17{,}5 - < 18{,}5$	3	3	3,2
$18{,}5 - < 19{,}5$	5	8	8,5
$19{,}5 - < 20{,}5$	11	19	20,2
$20{,}5 - < 21{,}5$	14	33	35,1
$21{,}5 - < 22{,}5$	26	59	62,8
$22{,}5 - < 23{,}5$	18	77	81,9
$23{,}5 - < 24{,}5$	13	90	95,7
$24{,}5 - < 25{,}5$	4	94	100

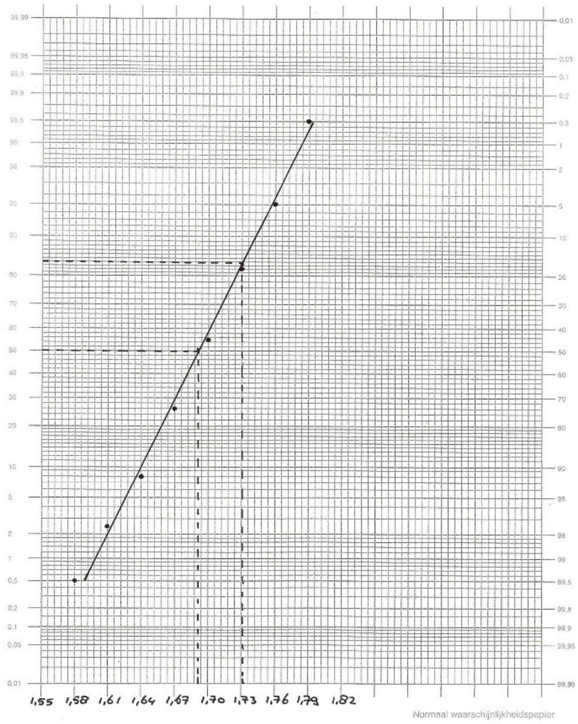


b. bij 50%: $\mu = 21{,}9$
bij 84%: $\mu + \sigma = 23{,}5$ dus $\sigma = 23{,}5 - 21{,}9 = 1{,}6$

Opgave 12:

a.

klasse	freq	cum freq	rel cum freq
$1{,}55 - < 1{,}58$	2	2	0,5
$1{,}58 - < 1{,}61$	8	10	2,5
$1{,}61 - < 1{,}64$	22	32	8
$1{,}64 - < 1{,}67$	72	104	26
$1{,}67 - < 1{,}70$	116	220	55
$1{,}70 - < 1{,}73$	108	328	82
$1{,}73 - < 1{,}76$	52	380	95
$1{,}76 - < 1{,}79$	18	398	99,5
$1{,}79 - < 1{,}82$	2	400	100



b. bij 50%: $\mu = 1{,}69$

bij 84%: $\mu + \sigma = 1{,}73$ dus $\sigma = 1{,}73 - 1{,}69 = 0{,}04$

c. $\mu - 2 \cdot \sigma = 1{,}65$

$2 \cdot \sigma = 1{,}68 - 1{,}65 = 0{,}03$

$\sigma = 0{,}015$

Opgave 13:

a. $73 - 11 = 62\%$

b. 13,3 mm of groter

c. groene olijven: $\mu = 12 \quad \sigma = 13{,}6 - 12 = 1{,}6$

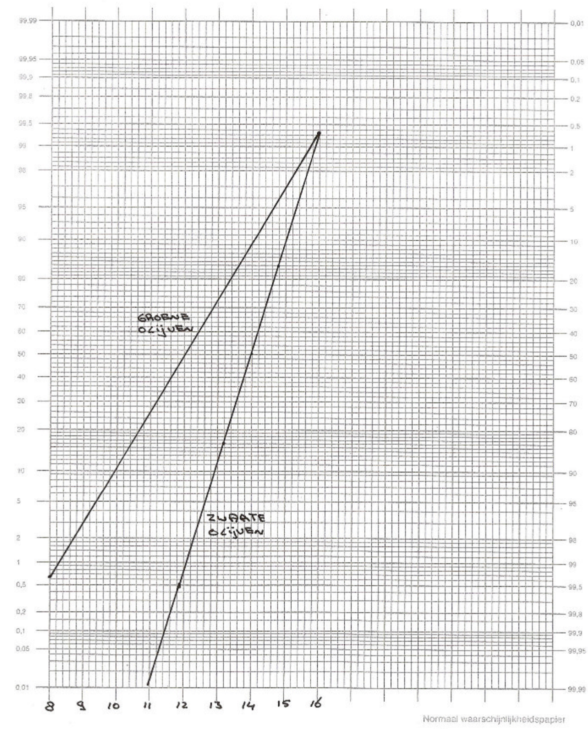
zwarte olijven: $\mu = 14 \quad \sigma = 0{,}8$

dus bij 50% hoort 14 , bij 84% hoort 14,8 en bij 16% hoort 13,2

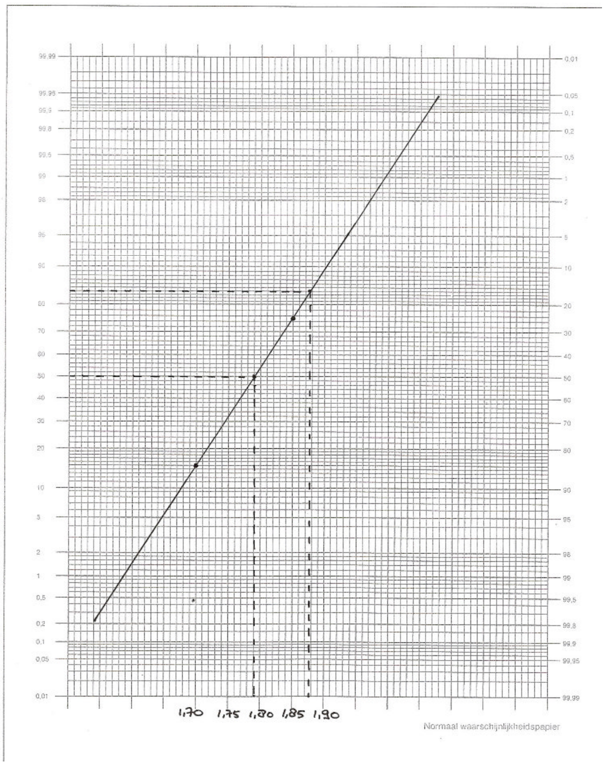
d. $P(groen > 14) = 0{,}1$

$P(zwart > 14) = 0{,}5$

$P(beide > 14) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$



Opgave 14:
Bij 50%: $\mu = 1{,}79$
Bij 84%: $\mu + \sigma = 1{,}88$
Dus $\sigma = 1{,}88 - 1{,}79 = 0{,}09$



Opgave 15:
a. dezelfde standaardafwijking
b. bij soort A is de standaardafwijking kleiner dan bij soort C
c. bij beide soorten is 80% van de bladeren korter dan 45 mm
d. ze snijden elkaar op hoogte 50

4.2 Oppervlakte onder normaalkrommen

Opgave 16:

a. dit volgt uit de vuistregels: $13{,}5 + 2{,}5 = 16\%$ dus 0,16

b. a 0,135
   b. 0,975
   c. 0,05
   d. 0,84

Opgave 17:

a. $Opp = normalcdf(-10^{99}, 5, 3.5, 1.1) = 0{,}914$

b. $Opp = normalcdf(700, 10^{99}, 850, 120) = 0{,}894$

c. $Opp = normalcdf(-10^{99}, 16, 17.1, 1.8) = 0{,}271$

d. $Opp = normalcdf(1000, 1100, 1080, 60) = 0{,}539$

Opgave 18:

a. $Opp = normalcdf(-10^{99}, 480, 520, 18) = 0{,}013$

b. $Opp = normalcdf(510, 10^{99}, 520, 18) = 0{,}711$

Opgave 19:

a. $normalcdf(-10^{99}, 5.1, 5.8, 0.4) = 0{,}040$ dus 4,0%

b. $normalcdf(5.25, 10^{99}, 5.8, 0.4) = 0{,}915$ dus 91,5%

c. $normalcdf(6.1, 6.4, 5.8, 0.4) = 0{,}160$ dus 16,0%

Opgave 20:

$1 - 0{,}65 = 0{,}35$

Opgave 21:

a. $a = invnorm(0.3, 16, 2) = 15{,}0$

b. $a = invmorm(0.3, 50, 8) = 45{,}8$

c. $a = invnorm(0.86, 600, 70) = 675{,}6$

d. $a = invnorm(0.92, 0.8, 0.2) = 1{,}08$

Opgave 22:

a. $\frac{2}{3}$

b. $a = invnorm(\frac{1}{3}, 40, 5) = 37{,}8$

   $b = invnorm(\frac{2}{3}, 40, 5) = 42{,}2$

Opgave 23:

$a = invnorm(0.2, 1000, 50) = 958$

$b = invnorm(0.4, 1000, 50) = 987$

$c = invnorm(0.6, 1000, 50) = 1013$ of 987 spiegelen t.o.v. 1000 geeft 1013

$d = invnorm(0.8, 1000, 50) = 1042$ of 958 spiegelen t.o.v. 1000 geeft 1042

Opgave 24:

a. $a = invnorm(0.25, 18, 2) = 16{,}7$

$b = invnorm(0.75, 18, 2) = 19{,}3$

b. $a = invnorm(0.09, 150, 12) = 133{,}9$

$b = invnorm(0.91, 150, 12) = 166{,}1$

c. $a = invnorm(0.06, 58, 6) = 48{,}7$

$b = invnorm(0.94, 58, 6) = 67{,}3$

Opgave 25:

a. $normalcdf(-10^{99}, 450, 400, \sigma) = 0{,}78$

b. schatting: $\sigma = 60$

$X\min = 50 \quad X\max = 100$

c. $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 450, 400, X)$

$y_2 = 0{,}78$

intersect geeft $X = 64{,}8$ dus $\sigma = 64{,}8$

Opgave 26:

a. $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 170, X, 12)$

$y_2 = 0{,}08$

b. schatting: $\mu = 190$

$X\min = 170 \quad X\max = 220$

c. intersect geeft: $X = 187$ dus $\mu = 187$

Opgave 27:

$y_1 = normalcdf(17, 10^{99}, X, 3.8)$

$y_2 = 0{,}28$

intersect geeft $X = 14{,}8$ dus $\mu = 14{,}8$

Opgave 28:

$y_1 = normalcdf(2080, 2320, 2200, X)$

$y_2 = 0{,}62$

intersect geeft $X = 136{,}7$ dus $\sigma = 140$

Opgave 29:

a. $y_1 = normalcdf(14.6, 10^{99}, X, 3.5)$

$y_2 = 0{,}41$

intersect geeft $X = 13{,}8$ dus $\sigma = 13{,}8$

b. $y_1 = normalcdf(14.6, 10^{99}, 12.3, X)$

$y_2 = 0{,}41$

intersect geeft $X = 10{,}1$ dus $\sigma = 10{,}1$

Opgave 30:

$normalcdf(2.18, 2.36, 2.3, 0.08) = 0{,}7066$

$y_1 = normalcdf(2.18, X, 2.3, 0.08)$

$y_2 = 0{,}3533$
intersect geeft $X = 2{,}284$ dus $a = 2{,}284$

Opgave 31:

$y_1 = 2 \cdot normalcdf(-10^{99}, 732, X, 18.6)$
$y_2 = 3 \cdot normalcdf(732, 740, X, 18.6)$
intersect geeft $X = 746{,}4$ dus $\mu = 746{,}4$

Opgave 32:

a. $normalcdf(-1, 1, 0, 1) = 0{,}6827$ dus 68,27%
b. $normalcdf(-2, 2, 0, 1) = 0{,}9545$ dus 95,45%

4.3 Toepassingen van de normale verdeling

Opgave 33:

a. $normalcdf(182, 10^{99}, 178, 5.4) = 0{,}229$

b. 22,9%

c. 0,229

Opgave 34:

a. $normalcdf(-10^{99}, 23, 25, 3) = 0{,}252$ dus 25,2%

b. $normalcdf(23.8, 25.3, 25, 3) = 0{,}195$

c. $normalcdf(26, 10^{99}, 25, 3) = 0{,}369$

$0{,}369 \cdot 240 = 89$

d. $1 - normalcdf(23.5, 26.5, 25, 3) = 0{,}617$ dus 61,7%

Opgave 35:

a. $normalcdf(60, 10^{99}, 78, 12) = 0{,}9332$

$0{,}9332 \cdot 1600 = 1493$ zijn zwaarder dan 60 kg

$normalcdf(-10^{99}, 65, 78, 12) = 0{,}1393$

$0{,}1393 \cdot 1600 = 223$ zijn lichter dan 65 kg

b. $normalcdf(70, 82, 78, 12) = 0{,}378$

c. $normalcdf(105, 10^{99}, 78, 12) = 0{,}0122$

$0{,}0122 \cdot 1600 = 20$

d. $invnorm(0.9, 78, 12) = 93{,}4$ dus vanaf 93 kg

Opgave 36:

a. $normalcdf(-10^{99}, 78, 85, 4\frac{2}{3}) = 0{,}067$ dus 6,7%

b. $normalcdf(-10^{99}, 78, 85, 2\frac{5}{6}) = 0{,}007$ dus 0,7%

Opgave 37:

a. I: $normalcdf(-10^{99}, 9, 11.5, 1.8) = 0{,}0{,}082$ dus 8,2%

II: $normalcdf(9, 11, 11.5, 1.8) = 0{,}308$ dus 30,8%

III: $normalcdf(11, 13, 11.5, 1.8) = 0{,}407$ dus 40,7%

IV: $normalcdf(13, 10^{99}, 11.5, 1.8) = 0{,}202$ dus 20,2%

b. $a = invnorm(\frac{1}{3}, 11.5, 1.8) = 10{,}7$

$b = invnorm(\frac{2}{3}, 11.5, 1.8) = 12{,}3$

dus 10,7 en 12,3 cm

c. $normalcdf(-10^{99}, 12, 11.5, 1.8) = 0{,}609$

$P(\text{ minstens 12 cm }) = 1 - 0{,}609 = 0{,}391$

$0{,}609 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}391 = 0{,}8045$

$a = invnorm(0.8045, 11.8, 1.8) = 13{,}0$ dus 13,0 cm

Opgave 38:

a. $normalcdf(17, 19, 18, 0.4) = 0{,}988$ dus 98,8%

b. $1 - normalcdf(17.3, 18.7, 18, 0.4) = 0{,}080$

c. $a = invnorm(0.01, 18, 0.4) = 17{,}1$

$b = invnorm(0.99, 18, 0.4) = 18{,}9$

dus minder dan 17,1 mm of meer dan 18,9 mm

Opgave 39:

a. $invnorm(0.9, 115.2, 13.1) = 132$

b. $invnorm(0.65, 115.2, 13.1) = 120{,}2$

dus vanaf 121 tot en met 131

Opgave 40:

a. $normalcdf(-10^{99}, 500, 501, 3) = 0{,}369$ dus 36,9%

b. $normalcdf(-10^{99}, 500, \mu, 3) \leq 0{,}05$

$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 500, X, 3)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \leq 0{,}05$

dat geldt voor $X = 505{,}0$

c. $normalcdf(-10^{99}, 500, \mu, 3) = 0{,}01$

$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 500, X, 3)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}01$

dat geldt voor $X = 507{,}0$ dus dan moet de machine worden afgesteld op een gemiddelde van 507,0, maar dat kan niet

Opgave 41:

a. $normalcdf(5, 10^{99}, 3.8, 1.3) = 0{,}178$

$0{,}178 \cdot 365 \cdot 24 = 1559$ uur

b. $normalcdf(3.4, 7.5, 3.8, 1.3) = 0{,}619$

$0{,}619 \cdot 365 \cdot 24 = 5419$ uur

c. $\dfrac{2700}{365 \cdot 24} = 0{,}308$

$normalcdf(7.9, 10^{99}, 7.2, \sigma) = 0{,}308$

$y_1 = normalcdf(7.9, 10^{99}, 7.2, X)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}308$

dat geldt voor $X = 1{,}4$ dus $\sigma = 1{,}4\, {}^{m}\!/_{s}$

d. $\dfrac{1250}{365 \cdot 24} = 0{,}143$

$normalcdf(-10^{99}, 5.5, \mu, 1.5) = 0{,}143$

$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 5.5, X, 1.5)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}143$

dat geldt voor $X = 7{,}1$ dus $\mu = 7{,}1\, {}^{m}\!/_{s}$

Opgave 42:

a. $normalcdf(245, 255, 250, \sigma) = 0{,}9$

$y_1 = normalcdf(245, 255, 250, X)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}9$
dat geldt voor $X = 3{,}04$ dus $\sigma = 3{,}04$ gram

b. $normalcdf(-10^{99}, 250, \mu, 4) \le 0{,}1$
$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 250, X, 4)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \le 0{,}1$
dat geldt voor $X = 255$ dus $\mu = 255$ gram

Opgave 43:

a. $normalcdf(3.1, 3.7, 3.5, 0.3) = 0{,}6563$
$\frac{20000}{0{,}6563} = 30474$

b. $normalcdf(3.8, 4.1, 3.5, 0.3) = 0{,}1359$
$0{,}1359 \cdot 30474 = 4142$

Opgave 44:

a. $normalcdf(1970, 2006, 2010, 35) = 0{,}328$ dus 32,8%

b. $invnorm(0.8, 2010, 35) = 2039$

c. $normalcdf(1940, 1945.5, 2010, 35) = 0{,}01$ dus 1,0%

d. $normalcdf(2000, 2006, 2010, 35) = 0{,}067$
$0{,}067 \cdot 1800 = 121$ Gb

e. $normalcdf(-10^{99}, 2006, 2010, \sigma) = \frac{800}{1800} = 0{,}444$
$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 2006, 2010, X)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}444$
dat geldt voor $X = 28{,}6$ dus $\sigma = 28{,}6$ jaar

Opgave 45:

a. A: $normalcdf(3.6, 4.4, 4, 0.2) = 0{,}9545$ dus 95,45% is bruikbaar
als hij 100 bruikbare leertje wil dan kost dat $\frac{1}{0{,}9545} \cdot 7{,}5 = 7{,}86$ euro
B: $normalcdf(3.6, 4.4, 4, 0.3) = 0{,}8176$ dus 81,76% is bruikbaar
Als hij 100 bruikbare leertjes wil dan kost dat $\frac{1}{0{,}8176} \cdot 6{,}5 = 7{,}95$ euro
dus aanbieding A is het aantrekkelijkst

b. $normalcdf(3.8, 10^{99}, \mu, 0.4) \le 0{,}04$
$y_1 = normalcdf(3.8, 10^{99}, X, 0.4)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \le 0{,}04$
dat geldt voor $X = 3{,}1$ (eigenlijk 3,09) dus $\mu = 3{,}1$

c. $normalcdf(4.5, 5.1, 4.8, \sigma) = 0{,}95$
$y_1 = normalcdf(4.5, 5.1, 4.8, X)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}95$
dat geldt voor $X = 0{,}15$ dus $\sigma = 0{,}15$

Opgave 46:

a. $normalcdf(-10^{99}, 2.5, 2.52, 0.12) = 0{,}434$

b. $1 - normalcdf(2.26, 2.86, 2.56, 0.12) = 0{,}012$ dus 1,2%

c. $normalcdf(-10^{99}, 2.5, \mu, 0.12) \leq 0{,}04$

$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 2.5, X, 0.12)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \leq 0{,}04$

dat geldt voor $X = 2{,}72$ dus $\mu = 2{,}72$

d. $\frac{16}{853} = 0{,}0188$

$normalcdf(2.72, 10^{99}, \mu, 0.12) = 0{,}0188$

$y_1 = normalcdf(2.72, 10^{99}, X, 0.12)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}0188$

dat geldt voor $X = 2{,}47$ dus $\mu = 2{,}47$

e. $normalcdf(2.5, 2.6, 2.53, 0.12) = 0{,}3189$

$normalcdf(-10^{99}, 2.5, 2.53, 0.12) = 0{,}4013$

$0{,}4013 + 0{,}5 \cdot 0{,}3189 = 0{,}5607$

$invnorm(0.5607, 2.53, 0.12) = 2{,}548$ dus van 2,50 tot 2,548 kg en van 2,548 tot 2,60 kg

Opgave 47:

a. $\frac{29}{325} = 0{,}0892$

$normalcdf(70, 10^{99}, 68, 1.49) = 0{,}0898$

b. $normalcdf(-10^{99}, 65.5, 68, 1.49) = 0{,}0467$

$0{,}0467 \cdot 500 = 23$

Opgave 48:

a. $normalcdf(59, 67, 63, 2\tfrac{1}{12}) = 0{,}945$

b. 70% van de artikelen wijkt minder dan 2,5 minuut af van het gemiddelde

$normalcdf(60.5, 65.5, 63, \sigma) = 0{,}7$

$y_1 = normalcdf(60.5, 65.5, 63, X)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}7$

dat geldt voor $X = 2{,}41$ dus $\sigma = 2{,}41 \cdot 60 = 145$ sec

c. $\frac{1500}{7000} = 0{,}2143$

$normalcdf(66, 10^{99}, 63, \sigma) = 0{,}2143$

$y_1 = normalcdf(66, 10^{99}, 63, X)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}2143$

dat geldt voor $X = 3{,}79$ dus $\sigma = 3{,}79 \cdot 60 = 227$ sec

4.4 De binomiale en de normale verdeling.

Opgave 49:

a. $P(X < 70) = normalcdf(-10^{99}, 70, 75, 18) = 0{,}391$

b. $0{,}391^3 = 0{,}060$

Opgave 50:

a. $X =$ aantal pakken dat minder dan 128 gram weegt
$P(\text{pak weegt minder dan 128 g}) = normalcdf(-10^{99}, 128, 130, 5) = 0{,}345$
$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - binomcdf(50, 0.345, 7) = 0{,}999$

b. $X =$ aantal pakken dat meer dan 132 gram weegt
$P(\text{pak weegt meer dan 132 g}) = normalcdf(132, 10^{99}, 130, 5) = 0{,}345$
$P(X = 8) = binompdf(50, 0.345, 8) = 0{,}002$

Opgave 51:

a. $X =$ aantal moeren met diameter meer dan 14,50
$P(\text{diameter meer dan } 14{,}50) = normalcdf(14.50, 10^{99}, 14.31, 0.12) = 0{,}057$
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - binomcdf(100, 0.057, 9) = 0{,}057$

b. $X =$ aantal moeren waarvan de diameter minder dan 0,1 mm afwijkt van het gemiddelde
$P(\text{diameter tussen } 14{,}21 \text{ en } 14{,}41) = normalcdf(14.21, 14.41, 14.31, 0.12) = 0{,}595$
$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - binomcdf(n, 0.595, 19) > 0{,}95$
neem $y_1 = 1 - binomcdf(X, 0.595, 19)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 > 0{,}95$
dat geldt voor $X \geq 42$
dus de partij moet minstens 42 moeren bevatten

Opgave 52:

a. $X =$ aantal handelingen die minstens 3 minuten duren
$P(\text{handeling duurt minstens 3 minuten}) = normalcdf(180, 10^{99}, 160, 15) = 0{,}091$
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - binomcdf(80, 0.091, 9) = 0{,}192$

b. $P(\text{handeling duurt minder dan } 2\tfrac{1}{2} \text{ minuut}) = normalcdf(-10^{99}, 150, 160, 15) = 0{,}252$
$180 \cdot 0{,}252 = 45$ dus 45 handelingen

c. $X =$ aantal handelingen dat meer dan 2 minuten en 45 seconden duurt
$P(\text{handeling duurt meer dan 2 min en 45 sec}) = normalcdf(165, 10^{99}, 160, 15) = 0{,}369$
$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - binomcdf(n, 0.369, 4) > 0{,}99$
neem $y_1 = 1 - binomcdf(X, 0.369, 4)$
kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 > 0{,}99$
dat is voor $X \geq 28$ dus minstens 28 handelingen

Opgave 53:

a. ja
b. ja, je kunt spiegelen ten opzichte van 0
c. ja, je kunt spiegelen ten opzichte van 0

Opgave 54:

$V = M - B$ is normaal verdeeld met

$\mu_V = \mu_M - \mu_B = 7{,}8 - 7{,}0 = 0{,}8$

$\sigma_V = \sqrt{{\sigma_m}^2 + {\sigma_B}^2} = \sqrt{0{,}45^2 + 0{,}60^2} = 0{,}75$

de bout is te dik voor de moer, dus $B > M$

dus $-M + B > 0$

dus $M - B < 0$

dus $V < 0$

$P(V < 0) = normalcdf(-10^{99}, 0, 0.8, 0.75) = 0{,}143$

Opgave 55:

$Z = X + Y$

$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 170 + 110 = 280$

$\sigma_Z = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208}$

$P(\text{ afhandelingstijd} > 300) = normalcdf(300, 10^{99}, 280, \sqrt{208}) = 0{,}083$ dus 8,3%

Opgave 56:

$Z = X + Y$

$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 5 + 248 = 253$

$\sigma_Z = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2} = \sqrt{0{,}3^2 + 12^2} = \sqrt{144{,}09}$

$P(Z > 250) = normalcdf(250, 10^{99}, 253, \sqrt{144{,}09}) = 0{,}599$ dus 59,9%

Opgave 57:

$X = I + II + III + IV$

$\mu_X = \mu_I + \mu_{II} + \mu_{III} + \mu_{IV} = 12 + 8 + 20 + 18 = 58$

$\sigma_X = \sqrt{{\sigma_I}^2 + {\sigma_{II}}^2 + {\sigma_{III}}^2 + {\sigma_{IV}}^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2 + 0{,}8^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{3{,}54}$

$P(X > 60) = mormalcdf(60, 10^{99}, 58, \sqrt{3{,}54}) = 0{,}144$ dus 14,4%

Opgave 58:

a. bout is te dik voor de moer, dus $B > M$ ofwel $B - M > 0$

$V = B - M$

$\mu_V = \mu_B - \mu_M = 13{,}2 - 13{,}5 = -0{,}3$

$\sigma_V = \sqrt{{\sigma_B}^2 + {\sigma_M}^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}05}$

$P(V > 0) = normalcdf(0, 10^{99}, -0.3, \sqrt{0.05}) = 0{,}090$ dus 9,0%

b. $V = B - M$

$\mu_V = \mu_B - \mu_M = 13{,}2 - \mu_M$

$\sigma_V = \sqrt{{\sigma_B}^2 + {\sigma_M}^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}05}$

$P(V > 0) = normalcdf(0, 10^{99}, 13.2 - \mu_M, \sqrt{0.05}) \leq 0{,}03$

neem $y_1 = normalcdf(0, 10^{99}, 13.2 - X, \sqrt{0.05})$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \leq 0{,}03$

dat is voor $X \geq 13{,}7$ dus $\mu_M \geq 13{,}7$ mm

Opgave 59:

a. er gaat limonade verloren als $Y > X$ ofwel $Y - X > 0$
neem $V = Y - X$
$\mu_V = \mu_Y - \mu_X = 1005 - 1015 = -10$
$\sigma_V = \sqrt{\sigma_Y^{\ 2} + \sigma_X^{\ 2}} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$
$P(V > 0) = normalcdf(0, 10^{99}, -10, \sqrt{80}) = 0{,}132$ dus 13,2%

b. $V = Y - X$
$\mu_V = \mu_Y - \mu_X = \mu_Y - 1015$
$\sigma_V = \sqrt{\sigma_Y^{\ 2} + \sigma_X^{\ 2}} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$
$P(V > 0) = normalcdf(0, 10^{99}, \mu_Y - 1015, \sqrt{80}) \le 0{,}002$
neem $y_1 = normalcdf(0, 10^{99}, X - 1015, \sqrt{80})$
kijk in de tabel voor welke *X* geldt dat $y_1 \le 0{,}002$
dat is voor $X \le 996{,}6$ dus $\mu_Y \le 996{,}6$

Opgave 60:

a. X_1 is de lengte van de eerste man en X_2 is de lengte van de tweede man
$V = X_1 - X_2$
$\mu_V = \mu_{X_1} - \mu_{X_2} = 178 - 178 = 0$
$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{V_1}^{\ 2} + \sigma_{V_2}^{\ 2}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$
$P(V < -15 \ \vee \ V > 15) = 2 \cdot P(V > 15) = 2 \cdot normalcdf(15, 10^{99}, 0, \sqrt{72}) = 0{,}077$

b. *Y* is het aantal tweetallen waarbij het onderlinge lengteverschil meer dan 15 cm is
$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1) = 1 - binomcdf(12, 0.077, 1) = 0{,}235$

Opgave 61:

a. niet waar
$P(X \le 4)$ betekent er zitten 0 , 1 , 2 , 3 of 4 rotte sinaasappels in een net van 18
$P(X < 4)$ betekent er zitten 0 , 1 , 2 of 3 rotte sinaasappels in een net van 18

b. waar, het gewicht is continu verdeeld dus $P(Y \le 4) = P(Y < 4)$

Opgave 62:

a. continu
b. discreet
c. continu
d. discreet
e. discreet
f. discreet
g. discreet
h. continu
i. discreet
j. discreet

Opgave 63:

a. $P(X \le 10) = P(Y \le 10{,}5)$
b. $P(X < 12) = P(X \le 11) = P(Y \le 11{,}5)$

c. $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - P(Y \leq 18{,}5)$
d. $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - P(Y \leq 7{,}5)$
e. $P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) = P(Y \leq 10{,}5) - P(Y \leq 5{,}5)$
f. $P(8 < X < 20) = P(X \leq 19) - P(X \leq 8) = P(Y \leq 19{,}5) - P(Y \leq 8{,}5)$
g. $P(X \leq 6 \;\vee\; X \geq 8) = P(X \leq 6) + 1 - P(X \leq 7) = P(Y \leq 6{,}5) + 1 - P(Y \leq 7{,}5)$
h. $P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = P(Y \leq 10{,}5) - P(Y \leq 9{,}5)$

Opgave 64:
a. $P(X \leq 28) = P(Y \leq 28{,}5) = normalcdf(-10^{99}, 28.5, 35.2, 6.9) = 0{,}166$
b. $P(X \geq 38) = P(Y \geq 37{,}5) = normalcdf(37.5, 10^{99}, 35.2, 6.9) = 0{,}369$
c. $P(X = 33) = P(32{,}5 \leq Y \leq 33{,}5) = normalcdf(32.5, 33.5, 35.2, 6.9) = 0{,}055$
d. $P(30 \leq X \leq 60) = P(29{,}5 \leq Y \leq 60{,}5) = normalcdf(29.5, 60.5, 35.2, 6.9) = 0{,}795$
e. $P(X < 45) = P(Y \leq 44{,}5) = normalcdf(-10^{99}, 44.5, 35.2, 6.9) = 0{,}911$
f. $P(X > 40) = P(Y \geq 40{,}5) = normalcdf(40.5, 10^{99}, 35.2, 6.9) = 0{,}221$

Opgave 65:
a. $P(X < 20) = P(Y \leq 19{,}5) = normalcdf(-10^{99}, 19.5, 28.2, 4.3) = 0{,}022$ dus 2,2%
b. $P(X = 30) = P(29{,}5 \leq Y \leq 30{,}5) = normalcdf(29.5, 30.5, 28.2, 4.3) = 0{,}085$
c. $P(X > 25) = P(Y \geq 25{,}5) = normalcdf(25.5, 10^{99}, 28.2, 4.3) = 0{,}735$

Opgave 66:
X is het aantal keer dat het word 'zie' gebruikt wordt
Y is de benadering van X met $\mu_Y = 9{,}8$ en $\sigma_Y = 3{,}6$
a. $P(X > 12) = P(Y \geq 12{,}5) = normalcdf(12.5, 10^{99}, 9.8, 3.6) = 0{,}227$
b. $P(X = 10) = P(9{,}5 \leq Y \leq 10{,}5) = normalcdf(9.5, 10.5, 9.8, 3.6) = 0{,}110$
c. $P(X > 12) = 0{,}227$
Z is het aantal bladzijden waarop meer dan twaalf keer het woordje 'zie' voorkomt
$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - binomcdf(16, 0.227, 1) = 0{,}907$

4.5 De $\sqrt{n}$ -wet

Opgave 67:

a. $\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \mu_{X_3} + \mu_{X_4} = 30 + 30 + 30 + 30 = 4 \cdot 30 = 120$

$\sigma_S = \sqrt{{\sigma_{X_1}}^2 + {\sigma_{X_2}}^2 + {\sigma_{X_3}}^2 + {\sigma_{X_4}}^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{4 \cdot 5^2} = \sqrt{4} \cdot 5 = 10$

b. $P(S > 135) = normalcdf(135, 10^{99}, 120, 10) = 0{,}067$

Opgave 68:

a. $\mu_S = 20 \cdot \mu_X = 20 \cdot 5 = 100$

$\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X = \sqrt{20} \cdot 0{,}5$

$P(S > 105) = normalcdf(105, 10^{99}, 100, 0.5\sqrt{20}) = 0{,}013$

b. Z is het aantal stapels dat niet in een doos past

$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - binomcdf(12, 0.013, 1) = 0{,}010$

Opgave 69:

a. $P(X < 20) = normalcdf(-10^{99}, 20, 25, 3) = 0{,}048$

b. $\mu_S = 6 \cdot \mu_X = 6 \cdot 25 = 150$

$\sigma_S = \sqrt{6} \cdot \sigma_X = \sqrt{6} \cdot 3$

$P(S < 140) = normalcdf(-10^{99}, 140, 150, 3\sqrt{6}) = 0{,}087$

c. Z is het aantal pakken dat minder dan 140 gram weegt

$P(Z > 2)1 - P(Z \leq 2) = 1 - binomcdf(20, 0.087, 2) = 0{,}250$

Opgave 70:

$\mu_S = 12 \cdot \mu_f + \mu_k = 12 \cdot 1{,}5 + 2 = 20$

$\sigma_S = \sqrt{12 \cdot {\sigma_f}^2 + {\sigma_k}^2} = \sqrt{12 \cdot 0{,}05^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}12}$

$P(S > 20{,}5) = normalcdf(20.5, 10^{99}, 20, \sqrt{0{,}12}) = 0{,}074$

Opgave 71:

a. $\mu_S = 6 \cdot \mu_R = 6 \cdot 4 = 24$

$\sigma_S = \sqrt{6} \cdot \sigma_R = \sqrt{6} \cdot 0{,}75$

$P(S > 25) = normalcdf(25, 10^{99}, 24, 0.75\sqrt{6}) = 0{,}293$

$50 \cdot 0{,}293 = 15$ dus 15 keer

b. $\mu_S = 6 \cdot \mu_R$

$P(S > 25) = normalcdf(25, 10^{99}, 6 \cdot \mu_R, 0.75\sqrt{6}) \leq \frac{1}{50}$

neem $y_1 = normalcdf(25, 10^{99}, 6 \cdot X, 0.75\sqrt{6})$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \leq 0{,}02$

dat geldt voor $X \leq 3{,}537$ dus maximaal 212 seconden

Opgave 72:

a. $P(X < 25 \ \vee \ X > 35) = 2 \cdot P(X < 25) = 2 \cdot normalcdf(-10^{99}, 25, 30, 4) = 0{,}211$

b. $\mu_{\overline{X}} = 30$

$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{4}{\sqrt{20}}$

$P(\overline{X} < 25 \ \vee \ \overline{X} > 35) = 2 \cdot P(\overline{X} < 25) = 2 \cdot normalcdf(-10^{99}, 25, 30, \tfrac{4}{\sqrt{20}}) = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$

c. $P(\overline{X} < 30 - a) = 0{,}025$

$30 - a = invnorm(0.025, 30, \tfrac{4}{\sqrt{20}}) = 28{,}25$

$a = 1{,}75$

d. $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{4}{\sqrt{n}}$

$P(\overline{X} < 29 \ \vee \ \overline{X} > 31) = 2 \cdot P(\overline{X} < 29) < 0{,}001$

$P(\overline{X} < 29) < 0{,}0005$

$normalcdf(-10^{99}, 29, 30, \tfrac{4}{\sqrt{n}}) < 0{,}0005$

neem $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 29, 30, \tfrac{4}{\sqrt{x}})$

kijk in de tabel voor welke *X* geldt dat $y_1 < 0{,}0005$

dat is voor $X \geq 174$ dus $n \geq 174$

Opgave 73:

a. *X* is de inhoud van 1 pakje

$P(X < 250) = normalcdf(-10^{99}, 250, 250.4, 0.6) = 0{,}252$ dus 25,2%

b. $\mu_{\overline{X}} = 250{,}4$

$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{10}} = \dfrac{0{,}6}{\sqrt{10}}$

$P(\overline{X} < 250) = normalcdf(-10^{99}, 250, 250.4, \tfrac{0{,}6}{\sqrt{10}}) = 0{,}018$ dus 1,8%

c. $\mu_{tot} = 10 \cdot \mu_X = 10 \cdot 250{,}4 = 2504$

$\sigma_{tot} = \sigma_X \cdot \sqrt{10} = 0{,}6\sqrt{10}$

$P(totaal < 2500) = normalcdf(-10^{99}, 2500, 2504, 0.6\sqrt{10}) = 0{,}018$

d. als de inhoud van een doos minder dan 2500 gram is, dan is de inhoud van een pakje gemiddeld minder dan $\frac{2500}{10} = 250$ gram

Opgave 74:

X is het gewicht van een koek

$\mu_{\overline{X}} = 104{,}5$

$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{16}} = \dfrac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5$

$P(\overline{X} \geq 100) = normalcdf(100, 10^{99}, 104.5, 2.5) = 0{,}964$ dus 96,4%

Opgave 75:

a. $normalcdf(-10^{99}, 100, 102, \sigma) = 0{,}15$

neem $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 100, 102, X)$

kijk in de tabel voor welke *X* geldt dat $y_1 = 0{,}15$

dat geldt voor $X = 1{,}93$ dus $\sigma = 1{,}93$

b. X is de inhoud van een fles

$\mu_{\overline{X}} = 102$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{12}} = \frac{1{,}93}{\sqrt{12}}$

$P(\overline{X} < 100) = normalcdf(-10^{99}, 100, 102, \frac{1{,}93}{\sqrt{12}}) = 0{,}0002$

c. Y is het aantal kratten waarvan de gemiddelde vulinhoud per fles minder dan 100 cl is

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - binompdf(25, 0.0002, 0) = 0{,}005$

d. Z is het aantal flessen met minder dan 100 cl inhoud

$P(Z \leq 2) = binomcdf(12, 0.15, 2) = 0{,}736$

Opgave 76:

$\mu_{\overline{X}} = 37$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{n}}$

$P(\overline{X} \geq 35) = normalcdf(35, 10^{99}, 37, \frac{5}{\sqrt{n}}) > 0{,}98$

neem $y_1 = normalcdf(35, 10^{99}, 37, \frac{5}{\sqrt{X}})$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 > 0{,}98$

dat geldt voor $X \geq 27$ dus minstens 27 bonbons in een doos

Opgave 77:

a. X is het gewicht van een theezakje

$P(X < 5) = normalcdf(-10^{99}, 5, 5.3, 0.5) = 0{,}274$

b. $\mu_{tot} = 20 \cdot \mu_X = 20 \cdot 5{,}3 = 106$

$\sigma_{tot} = \sigma_X \cdot \sqrt{20} = 0{,}5\sqrt{20}$

$P(totaal < 100) = normalcdf(-10^{99}, 100, 106, 0.5\sqrt{20}) = 0{,}004$

c. $\mu_{\overline{X}} = 5{,}3$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{20}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}$

$P(\overline{X} < 5{,}2 \;\vee\; \overline{X} > 5{,}4) = 2 \cdot P(\overline{X} < 5{,}2) = 2 \cdot normalcdf(-10^{99}, 5.2, 5.3, \frac{0.5}{\sqrt{20}}) = 0{,}371$

dus 37,1%

d. $\mu_{\overline{X}} = 5{,}3$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{n}}$

$P(\overline{X} < 5) = normalcdf(-10^{99}, 5, 5.3, \frac{0.5}{\sqrt{n}}) \leq 0{,}02$

neem $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 5, 5.3, \frac{0.5}{\sqrt{X}})$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 \leq 0{,}02$

dat geldt voor $X \geq 12$ dus minstens 12 theezakjes in een doos

4.7 Diagnostische toets hoofdstuk 4

Opgave 1:

a. $444 = \mu - 2\sigma$ dus 97,5%

$0{,}975 \cdot 750 = 731$

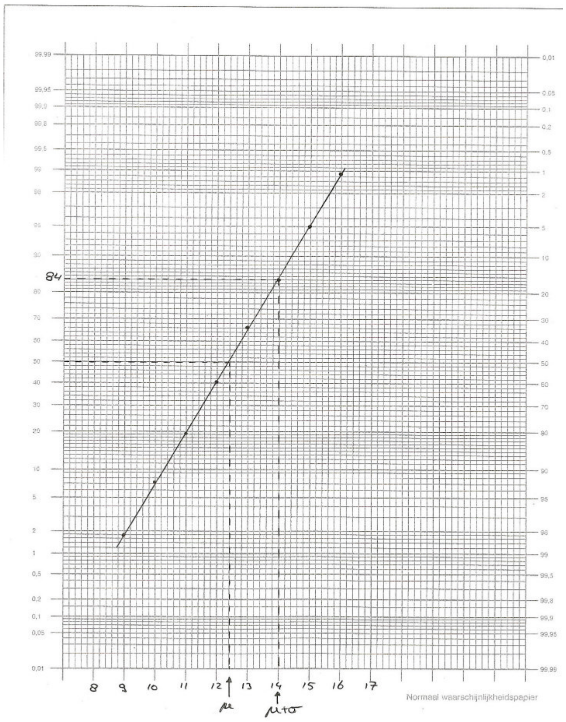
b. $468 = \mu + \sigma$ en $476 = \mu + 2\sigma$ dus 34%

$0{,}34 \cdot 750 = 255$

Opgave 2:

a.

klasse	freq	cum freq	rel cum freq
$8-<9$	7	7	1,8
$9-<10$	20	27	7,1
$10-<11$	46	73	19,2
$11-<12$	80	153	40,3
$12-<13$	98	251	66,1
$13-<14$	68	319	83,9
$14-<15$	42	361	95,0
$15-<16$	15	376	98,9
$16-<17$	4	380	100



b. $\mu = 12{,}4$

$\sigma = 1{,}6$

Opgave 3:

a. $a = invnorm(0.125, 158, 12) = 144{,}2$

b. $y_1 = normalcdf(112, 10^{99}, X, 16)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}71$

dat geldt voor $X = 120{,}9$ dus $\mu = 120{,}9$

c. $y_1 = normalcdf(14, 22, 18, X)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}74$

dat geldt voor $X = 3{,}6$ dus $\sigma = 3{,}6$

Opgave 4:

$normalcdf(230, 260, 220, 35) = 0{,}261$

$normalcdf(-10^{99}, 230, 220, 35) = 0{,}612$

$Opp = 0{,}612 + 0{,}5 \cdot 0{,}261 = 0{,}743$

$a = invnorm(0.743, 220, 35) = 242{,}8$

Opgave 5:

$y_1 = normalcdf(-10^{99}, 980, 1050, X)$

$y_2 = normalcdf(980, 1000, 1050, X)$

Intersect geeft $X = 49$ dus $\sigma = 49$

Opgave 6:

a. X is de levensduur in uren

$P(X > 30000) = normalcdf(30000, 10^{99}, 250000, 2700) = 0{,}032$

b. $P(X > a) > 0{,}03$

$P(X \leq a) < 0{,}97$

$a = invnorm(0.97, 25000, 2700) = 30078$ dus na 30078 uur

Opgave 7:

X is de tijd in seconden

a. $P(X < 2760) = normalcdf(-10^{99}, 2760, 2820, 50) = 0{,}115$

b. $a = invnorm(0.98, 2820, 50) = 2922$ sec $= 48$ min en 43 sec

dus minstens 48 min en 43 sec

c. bij een snelheid van 20 $^{km}/_{uur}$ doet hij 45 minuten over de 15 km

$P(X < 2700) = normalcdf(-10^{99}, 2700, 2820, 50) = 0{,}008$ dus 0,8%

Opgave 8:

X is de inhoud van een doos

$P(X,250) = normalcdf(-10^{99}, 250, \mu, 4) = 0{,}1$

neem $y_1 = normalcdf(-10^{99}, 250, X, 4)$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 = 0{,}1$

dat is voor $X = 255{,}1$ dus $\mu = 255{,}1$ gram

Opgave 9:

X is de lengte van een bout

$P(X > 7{,}8) = normalcdf(7.8, 10^{99}, 8, 0.3) = 0{,}7475$

$P(5 \times \text{te lang}) = 0{,}7475^5 = 0{,}233$

Opgave 10:

$\mu_{tot} = \mu_I + \mu_{II} + \mu_{III} = 19{,}3 + 12{,}5 + 10{,}7 = 42{,}5$

$\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 1{,}2^2} = \sqrt{9{,}94}$

$P(totaal > 45) = normalcdf(45, 10^{99}, 42.5, \sqrt{9.94}) = 0{,}214$ dus 21,4%

Opgave 11:

a. $P(X < 30) = P(Y \leq 29{,}5) = normalcdf(-10^{99}, 29.5, 42.5, 8.3) = 0{,}059$

b. $P(X = 42 \quad \vee \quad X = 43) = P(41{,}5 \leq Y \leq 43{,}5) = normalcdf(41.5, 43.5, 42.4, 8.3) = 0{,}096$

c. $P(X \geq 50) = P(Y \geq 49{,}5) = normalcdf(49.5, 10^{99}, 42.5, 8.3) = 0{,}200$

Opgave 12:

X is de inhoud van een pot

a. $P(X > 725) = normalcdf(725, 10^{99}, 720, 14) = 0{,}360$

b. Y is de totale inhoud van de potten in een doos

$\mu_Y = 16 \cdot \mu_X = 16 \cdot 720 = 11520$

$\sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sigma_X = \sqrt{16} \cdot 14 = 56$

$P(Y > 11600) = normalcdf(11600, 10^{99}, 11520, 56) = 0{,}077$

c. $\mu_{\overline{X}} = 720$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{16}} = 3{,}5$

$P(\overline{X} < 710) = normalcdf(-10^{99}, 710, 720, 3.5) = 0{,}002$

d. $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{n}}$

$P(719 < X < 721) = normalcdf(719, 721, 720, \frac{14}{\sqrt{n}}) > 0{,}999$

$y_1 = normalcdf(719, 721, 720, \frac{14}{\sqrt{X}})$

kijk in de tabel voor welke X geldt dat $y_1 > 0{,}999$
dat geldt voor $X \geq 1301$ dus minstens 1301 potten